1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı: **12.01.2025**

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $\mathbb{R}^n$ de yakınsak her dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz (10 puan).

2) Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2}{1+x^n}$ fonksiyonlarının (f_n) dizisinin düzgün yakınsak olup olmadığını araştırınız (15 puan).

3) $\mathbb{R}^2$ de verilen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!}, \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$ serisinin karakterini belirleyiniz. Seri yakınsak ise değerini bulunuz (15 puan).

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + (\sin x)^2}$ has olmayan integralinin karakterini belirleyiniz (10 puan).

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}(x+1)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını bulunuz (15 puan).

6) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \left((0,1)^n, \dfrac{\sqrt{n} + \sin n}{2\sqrt{n}}, \dfrac{(-1)^n}{n} \right)$ genel terimiyle $\mathbb{R}^3$ de verilen (a_n) dizisinin karakterini belirleyiniz. Dizi yakınsak ise limitini bulunuz (10 puan).

7) Aşağıda boş bırakılan yerlere **Doğru veya Yanlış** yazınız (25 puan).

a) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-2, \frac{1}{n} \right)$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalı bir kümedir........Doğru.

b) $(-2,2)$ aralığı $\mathbb{R}$ de dizisel kompakt bir kümedir........Yanlış..

c) $\mathbb{R}^n$ de konveks bir küme bağlantılıdır........Doğru.

d) $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin $\partial\mathbb{Q}$ sınır kümesi $\mathbb{R}$ kümesidir........Doğru..

e) $\mathbb{R}^2$ de verilen $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < y \leq 3\} \cup \{(4,4)\}$ kümesi için $\overline{A} = A'$ olur.

........Yanlış..

Not: 7. sorudaki her şık 5 puandır. Süre 90 dakikadır. **Dr. Erdem TOKSOY**

= CEVAP ANAHTARI =

1) $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$, $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$ olacak şekilde herhangi bir dizi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\forall k \geq k_0$ iken

$$\|x_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \dots (1)$$

olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve $k_0 \in \mathbb{N}$ için $\forall k,m \geq k_0$ iken (1) kullanılarak

$$\begin{aligned}\|x_k - x_m\| &= \|x_k - x_m - x + x\| \\ &\leq \|x_k - x\| + \|x_m - x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

yazılır. Bu takdirde (x_k), $\mathbb{R}^n$ de bir Cauchy dizisidir.

2) Öncelikle (f_n) fonksiyon dizisinin noktasal yakınsaklığına bakalım.

$x_0 = 1$ için $f_n(1) = \dfrac{2}{1+1^n} = \dfrac{2}{2} = 1$ olup $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$ olur.

Ayrıca $\forall x \in (1,+\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = +\infty$ olduğundan

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{1+x^n} = 0$ bulunur. O halde (f_n) dizisi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [1,+\infty)$ için $f_n(x) = \dfrac{2}{1+x^n}$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar iken f fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında sürekli olmadığından (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

3) Öncelikle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ serisini ele alalım. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ olduğu bilinmektedir. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

olup $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ yakınsaktır ve değeri $\frac{1}{e}$ bulunur.

Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ serisini ele alalım. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ olduğu bilinmektedir. Böylece $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

olup $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ serisi yakınsaktır ve değeri $\frac{\pi}{2}$ olur. Bu takdirde

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!}, \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$ serisi yakınsaktır ve değeri $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ bulunur.

4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ integrali 1. çeşit has olmayan integraldir.

$\forall x \in [1,+\infty)$ için $f(x) = \frac{1}{x^2+\sin^2 x} \geq 0$ olur. Yine $\forall x \in [1,+\infty)$ için

$0 \leq \sin^2 x \leq 1$ olup $x^2 \leq \sin^2 x + x^2 \leq 1+x^2$ olduğundan $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2+\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \; \ldots (2)$

yazılır. Burada $\forall x \in [1,+\infty)$ için $g(x) = \frac{1}{x^2}$ alınırsa

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ integrali $p = 2 > 1$ olduğundan p-testi gereği

yakınsaktır. Böylece (2) eşitsizliği ve karşılaştırma testinden

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$ integrali yakınsaktır.

5) Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ olup $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ olduğundan

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\cancel{2^n}} \cdot \frac{\cancel{2^n} \cdot 2}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 2$$

yakınsaklık yarıçapı olur. Burada $x_0 = -1$ merkezli kuvvet serisi

$$|x+1| < 2 \iff -2 < x+1 < 2 \iff -3 < x < 1 \iff x \in (-3, 1)$$

aralığında yakınsaktır.

Eğer $x_1 = -3$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n}$ olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = (-1)^n \cdot \sqrt{n}$

denirse n çift iken $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n} = +\infty$, n tek iken $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n} = -\infty$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} b_n$ limiti yoktur. O halde genel terim testinden $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sqrt{n}$

serisi ıraksaktır.

Eğer $x_2 = 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ olup $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ olduğundan

genel terim testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ ıraksaktır. Bu takdirde verilen kuvvet

serisinin yakınsaklık aralığı $(-3, 1)$ bulunur.

6) Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n_1} = (0,1)^n$, $a_{n_2} = \frac{\sqrt{n} + \sin n}{2\sqrt{n}}$, $a_{n_3} = \frac{(-1)^n}{n}$

alınırsa $\lim_{n\to\infty} a_{n_1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_{n_2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq \sin n \leq 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$ bulunur. O halde $\lim_{n\to\infty} a_{n_2} = \frac{1}{2}$ dir.

Son olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} a_{n_3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ bulunur. Bu takdirde $(a_n) = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3})$

dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ elde edilir.